APROBADO
Por Bernardo Cascales fecha 21:44 , 19/12/2011

Análisis Complejo: 2.1 Principios del máximo

Objetivos

- Demostrar que las funciones continuas con la propiedad de la media satisfacen el principio del máximo. Demostrar el principio del módulo máximo para funciones holomorfas.
- Obtener el lema de Schwarz a partir del principio del máximo.
- Caracterizar los isomorfismos conformes del disco unidad en si mismo.

Definición

Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función continua. Se dice que:

- f satisface la propiedad de la media si para cada $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$,

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt.$$

FINAL

- f es subarmónica si $f(\Omega)\subset\mathbb{R}$ y para cada $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$,

$$f(a)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt.$$

Ejemplos

- Toda función holomorfa tiene la propiedad de la media.
- La parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa satisface la propiedad de la media.
- El módulo de una función holomorfa es una función subarmónica.

Efectivamente: si $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$; sabemos por la fórmula de Cauchy que si $\gamma(t)=a+re^{it}$ $t\in[0,2\pi]$, entonces se tiene:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-a}\,dw=\frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{it})\,\cancel{ire^{it}}}{\cancel{a+re^{it}-a}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt. \quad [*]$$

Observar ahora que tomando partes reales y partes imaginarias en la integral, se tiene que $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ también satisfacen la propiedad de la media. A partir de la igualdad [*] tomando $|\cdot|$ se tiene que

$$|f(a)|\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{it})|\,dt$$

y consecuentemente $|f|$ es una función subarmónica. #

Proposición FINAL

Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un abierto conexo y $u:\Omega\to\mathbb{R}$ una función subarmónica. Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

Demostración.- Supongamos $u(a)\geq u(z)$ para cada $z\in\Omega$. Vamos a demostrar que $u(a)=u(z)$ para cada $z\in\Omega$. Para ello consideramos el conjunto $A=\{z\in\Omega:\ u(z)=u(a)\}$. Sabemos que:

i) $A\neq\emptyset$

ii) A es cerrado en Ω

iii) Probamos que A es abierto. Efectivamente, si $b\in B$ y $D(b,\rho)\subset\Omega$ probaremos que $D(b,\rho)\subset A$. Para esto, tomamos $0<r<\rho$ y consideramos:

$$u(b) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(b+re^{i\theta})\,d\theta \overset{\overset{u(b+re^{i\theta})\le u(b)}{\uparrow}}{\le} u(b) \curvearrowright$$

$$\curvearrowright \quad u(b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(b+re^{i\theta})\,d\theta \curvearrowright$$

$$\curvearrowright \quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(b) - u(b+re^{i\theta})]\,d\theta \quad \xrightarrow[\text{continua}]{\theta \rightsquigarrow u(b)-u(b+re^{i\theta}) \ge 0}$$

concluimos que, $u(b) = u(b+re^{i\theta})$ para todo $0<r<\rho$ y $\theta\in[0,2\pi]$, de aquí se sigue que $u|_{D(b,\rho)} = u(b) = u(a)$ y acaba la prueba. #

Teorema del módulo máximo

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $|f|$ alcanza un máximo relativo en Ω, entonces f es constante.

Dem.- Si utilizamos el T^ma anterior se obtiene que $|f| = cte$ $\rightsquigarrow$ $f = cte.$; lo que se puede razonar bien porque f no sería abierta ó bien porque las condiciones de Cauchy-Riemann implican $f' = 0 \rightsquigarrow f = cte.$ #

NOTA: El principio del mínimo $|f|$ sólo se satisface si $f(z)\neq 0$ para cada $z\in\Omega$. #

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $\mathrm{Re} f$ o $\mathrm{Im} f$ alcanza un máximo relativo en Ω, entonces f es constante.

Dem.- Se razona como el teorema anterior. #

PRINCIPIO DEL MAXIMO.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si

$$\limsup_{z \to a} u(z) \leq c,$$

para cada $a \in \partial_\infty \Omega$, entones o bien $u(z) < c$ para cada $z \in \Omega$ o bien $u(z) = c$ para cada $z \in \Omega$.

FINAL

Demostración.— Antes de la demostración conviene tener claro que quiere decir

$$\overline{\lim_{z\to a}}\ u(z) = \limsup_{z\to a} u(z) = L$$

Por definición, el límite anterior es:

$$L = \lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{z \in D(a,r)\cap\Omega} u(z) \right\}$$

que en la práctica significa, que para cada $\varepsilon > 0$, existe $r_\varepsilon > 0$ t.q. si $0 < r < r_\varepsilon$, entonces:

$$L - \varepsilon < \sup\{u(z) : z \in \Omega \cap D(a,r)\} < L + \varepsilon$$

lo que significa, que para $0 < r < r_\varepsilon$ se tiene:

1) Para cada $z \in D(a,r)\cap\Omega \rightarrow u(z) < L + \varepsilon$

2) $\exists\, z_0 \in D(a,r)\cap\Omega \rightarrow L - \varepsilon < u(z_0)$.

Dado $\varepsilon > 0$ vamos a demostrar que se tiene

$(*)$ $[\ u(z) \leq c$ para cada $z \in \Omega\ ]$

!!! observemos que esto implica la tesis del enunciado porque si $u(z_0) = c$ para algun $z_0 \in \Omega \rightarrow u$ tiene un máximo absoluto en Ω y por una proposición anterior $u(z) = u(z_0) = c$ para cada $z \in \Omega$!!!

ASÍ PUES DEMOSTRAMOS $(*)$, y para ello demostramos que para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto,

$$H_\varepsilon = \{z\in\Omega : \ u(z) > C+\varepsilon\}$$

es vacío. Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que $H_\varepsilon \neq \emptyset$. Tenemos las siguientes propiedades para H_ε:

1)- H_ε es abierto.

2)- H_ε es acotado. Esto es evidente si Ω es acotado. Si Ω no es acotado $\infty \in \partial\Omega$ y como

$$\lim_{z\to\infty} u(z) \le C \curvearrowright \exists\, R>0 : \{z\in\Omega : |z|>R\} \curvearrowright$$
$$u(z) \le M+\varepsilon \curvearrowright H_\varepsilon \subset \overline{D(0,R)}.$$

3)- $\overline{H_\varepsilon} \subset \Omega$. Como $H_\varepsilon \subset \Omega$ para ver que $\overline{H_\varepsilon}\subset\Omega$ es suficiente ver que si $a\in\overline{H_\varepsilon}$ entonces $a\notin\partial\Omega$ (obsérvese que $\overline{H_\varepsilon}\subset\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$). Supongamos que $a\in\partial\Omega$, como

$$\overline{\lim_{z\to a}}\, u(z) \le C$$

$\curvearrowright \exists\, D(a,r)$ tal que si $z\in D(a,r)\cap\Omega \curvearrowright u(z)< C+\varepsilon \curvearrowright$
$\curvearrowright z\notin H_\varepsilon \curvearrowright a\notin\overline{H_\varepsilon}$.

Así, 1), 2) y 3) implican que $\overline{H_\varepsilon}$ es un compacto no vacío y por lo tando existe $b\in\overline{H_\varepsilon}$ tal que

$$u(b) = \max\{u(z) : z\in\overline{H_\varepsilon}\} \geq C+\varepsilon$$

Por otra parte $u(z)\le C+\delta$ para cada $z\in\Omega\setminus H_\varepsilon$, así se concluye que

$$u(b) = \max\{u(z) : z\in\Omega\} \geq C+\varepsilon$$

Así, $u\equiv cte \geq C+\varepsilon$, que contradice $\lim_{z\to a} u(z)\le C$. $\#$

NOTA: En el teorema anterior no es suficiente considerar $\partial\Omega$. Tomar $f(z)=e^z$ en $\Omega=\{z\in\Omega : \operatorname{Re} z>0\}$.

Corolario

Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua cuya restricción a $\overset{o}{K} =: \Omega$ es holomorfa. Entonces existe $a \in \partial K$ tal que:

$$|f(a)| = \max\{|f(z)| : z \in K\}.$$

FINAL

Demostración.- Como f es continua en un compacto, existe $b \in K$ tal que

$$|f(b)| = \max\{|f(z)| : z \in K\}.$$

Si $b \in \partial K$ tomamos $a = b$ y acaba la prueba.

Si $b \in \overset{o}{K}$ vamos a encontrar $a \in \partial K$ tal que $f(a) = f(b)$. Supongamos que $b \in \Omega := \overset{o}{K}$ y sea Ω_b la componente conexa de b en Ω.

Como Ω_b es conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega_b)$ y b es un máximo para $|f|$, se deduce que $f(z) = cte = f(b)$ para cada $z \in \Omega_b$. Como Ω_b es acotado $\partial \Omega_b \neq \emptyset$. Tomamos $a \in \partial \Omega_b \subset K$ como f es continua en K entonces $f(a) = cte = f(b)$. Ahora vemos que $a \in \partial K$: si esto no fuera así $a \in \overset{o}{K} = \Omega$; si Ω_a es la componente conexa de a, entonces $a \in \Omega_a \cap \overline{\Omega_b}$ $\rightsquigarrow$ Ω_a y Ω_b son dos conexos no separados y así $\Omega_a \cup \Omega_b$ es un conexo $\rightsquigarrow$ $\Omega_a = \Omega_b$ $\rightsquigarrow$ $a \in \Omega_b$ lo que es absurdo ya que $a \in \partial \Omega_b$. #

NOTA: En particular si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y tomamos $K = \overline{D(0,r)}$ entonces se tiene

$$\sup\{|f(z)| : |z| \leq r\} = |f(z_0)| \quad \text{para algún } |z_0| = r.$$

✓ Así $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z| = r\}$ es CRECIENTE.
(Se prueba que f es continua).

✓ $\lim_{r \to +\infty} M(r) = +\infty$ si $f \not\equiv 0$.

✓ Observar que como consecuencia del resultado anterior se tiene que si $f_n, f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $f_n \longrightarrow f$ uniform. sobre compactos de Ω sii $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en las fronteras de todo los discos $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$.

LEMA DE SCHWARZ Y SUS CONSECUENCIAS

Lema de Schwarz

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $f(0)=0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Entonces

FINAL

$$|f(z)| \leq |z| \text{ para cada } z \in D(0,1) \text{ y } |f'(0)| \leq 1.$$

Si $|f(a)| = |a|$ para algún $a \neq 0$, ó si $|f'(0)| = 1$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\alpha} z$.

Demostración.– Definimos

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

g es una función continua en $D(0,1)$ y holomorfa en $D^*(0,1)$. Consecuent. $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Por otro lado dado $0<r<1$ se tiene

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r} \quad \text{para } |z|=r \xrightarrow{\text{Principio}} \text{Módulo Máximo}$$

$|g(z)| \leq 1/r \quad \forall\, |z| \leq r$. Así fijamos z y tomamos $\lim r \to 1^-$ y se obtiene que $|g(z)| \leq 1$ para cada $z \in D(0,1)$. En particular

$(\cdot)$ $|g(0)| \leq 1 \rightsquigarrow |f'(0)| \leq 1$

$(\cdot\cdot)$ $z \neq 0$ $|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1 \rightsquigarrow |f(z)| \leq |z|$ $z \neq 0$

Observar que como $f(0)=0$, se tiene $|f(z)| \leq |z|$ para cada $z \in D(0,1)$.

Por otro lado si $|f'(0)|=1$ o en algún $z_0 \neq 0$ $|f(z_0)| = |z_0| \rightsquigarrow$ volviendo hacia atrás las implicaciones en $(\cdot)$ y $(\cdot\cdot)$ se concluye que $|g|$ alcanza 1 como valor máximo $D(0,1)$, así $|g(z)|=1$ para cada $z \in D(0,1) \rightsquigarrow g(z) = \mu$ cte con $|\mu|=1 \rightsquigarrow$

$z \neq 0$ $\frac{f(z)}{z} = \mu \rightsquigarrow f(z) = \mu z$ $\forall z \in D(0,1)$ ##

Isomorfismos del disco unidad

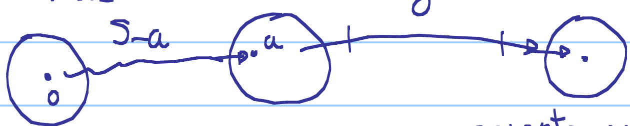
Corolario

$f : D(0,1) \to D(0,1)$ es un biyección holomorfa si y sólo si existen $a \in D(0,1)$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

FINAL

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (*)$$

Demostración.- Ya hemos visto que una función dada como en $(*)$ es un isomorfismo de $D(0,1)$. Recíprocamente, supongamos que $f: D(0,1) \longmapsto D(0,1)$ es una biyección holomorfa y sea $a \in D(0,1)$ t.q. $f(a)=0$. Pongamos $S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Entonces



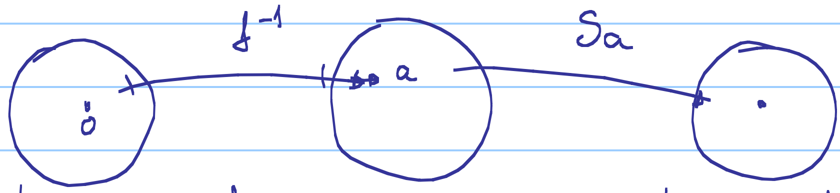
$f \circ S_{-a} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$

Lleva el punto $0 \longrightarrow 0$

y consecuentemente $|(f \circ S_{-a})'(0)| \leq 1$

$\rightsquigarrow \; |f'(a)\cdot S'_{-a}(0)| \le 1 \;\rightsquigarrow\; |f'(a)| \le \dfrac{1}{|S'_{-a}(0)|} = |S'_a(a)|$

Consideremos ahora



Utilizando la misma idea $\quad |S'_a(a)| \le \dfrac{1}{|(f^{-1})'(a)|} = |f'(a)|$

Es decir $\quad |f'(a)| = |S'_a(a)| = \left|\dfrac{1}{S'_{-a}(0)}\right|$

Por lo tanto, $\quad |(f\circ S_{-a})'(0)| = |f'(a)\cdot S'_{-a}(0)| =$

$|f'(a)|\,|S'_{-a}(0)| = 1 \;\rightsquigarrow$

$f\circ S_{-a}(z) = \mu z \quad$ para algun $|\mu| = 1$ y cada $|z|<1$

Llamando $\quad w = S_{-a}(z) \quad$ queda que

$f(w) = \mu\, S_a(w) \quad |w|<1$ y acaba la prueba #

NOTA: El alumno puede demostrar como ejercicio que la prueba que hemos hecho sirve para demostrar que si $\Omega \neq \mathbb{C}$ un abierto para el que existen $\quad f, g : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ biyecciones holomorfas tal que $f(a) = g(a) = 0$ para algún $a \in \Omega$, entonces

$f(z) = \mu \cdot g(z) \quad \forall z \in \Omega$ donde $|\mu| = 1$ #

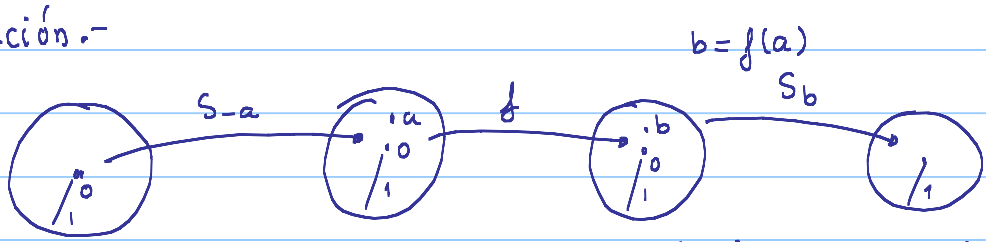
Corolario

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$. Entonces para cada $a \in D(0,1)$ se cumple

$$|f'(a)| \le \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$

y si en algún $a \in D(0,1)$ se cumple la igualdad entonces f es una biyección holomorfa de $D(0,1)$ en si mismo. En particular, si f no es inyectiva se cumple $|f'(0)| < 1$.

Demostración.-



Donde $S_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}$. $S'_\alpha(z) = \frac{1-\bar{\alpha} z + \bar{\alpha}(z-\alpha)}{(1-\bar{\alpha} z)^2}\Big|_{z=\alpha} = \frac{1-|\alpha|^2}{(1-|\alpha|)^2} = \frac{1}{1-|\alpha|^1}$

Así, tenemos que: si llamamos $g(z) = S_b \circ f \circ S_{-a}$, entonces $g(0) = 0$ y $g(D(0,1)) \subset D(0,1) \rightsquigarrow |g'(0)| \le 1$ (*)

$$g'(0) = S_b'(b) \cdot f'(a) \cdot S_{-a}'(0) = S_b'(b) \cdot f'(a) \cdot \frac{1}{S_a'(a)} \rightsquigarrow$$

(*) $\rightsquigarrow$ $|f'(a)| \le \frac{|S_a'(a)|}{|S_b'(b)|} = \frac{\frac{1}{1-|a|^2}}{\frac{1}{1-|b|^2}} = \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2} = \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$.

Observese que si en se cumple la igualdad $\rightsquigarrow |g'(0)| = 1 \rightsquigarrow g(z) = G(z)$, donde G es un giro $\rightsquigarrow$ $S_b \circ f \circ S_{-a} = G \rightsquigarrow f = S_{-b} \circ G \circ S_a$ es biyección.

Como consecuencia de lo anterior f no es inyectiva, entonces necesariamente se tiene $|f'(0)| < 1 - |f(0)|^2 \le 1$ #